B කොටස

තෝරාගත් ප්‍රශ්න 05කට පිළිතුරු සපයන්න.

11) a) $f(x) = x^2 + 5x + 7, x \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $f(x) = 0$ හි මූල α හා β වේ. මූල $\alpha^2 + 1$ හා $\beta^2 + 1$ වන x හි වර්ගජ සමීකරණය ලබාගන්න.

$f(x) = k$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල පවතිනසේ වූ k නියතය සඳහා තිබිය හැකි අගය පරාසය සොයන්න.

$\frac{1}{f(x)}$ හි වැඩිතම අගය සොයා එම අගය ලැබෙන්නා වූ x හි අගය ද සොයන්න.

b) $f(x) = x^4 + 3x^3 + ax^2 - x + b$ නම් බහු පදයේ $(x+1)$ හා $(x-2)$ සාධක වේ. a හා b හි අගයන් සොයන්න.

a හා b හි මෙම අගයන්ට අනුරූප ඉහත බහුපදයේ ඉතිරි සාධකය වන $g(x)$ සොයන්න.

$g(x)$ හි අවම අගය ද සොයන්න.

23' AL API (PAPERS GROUP

12) a) එක්තරා පෞද්ගලික ආයතනයක විධායක ශ්‍රේණියේ නිලධාරීන් 9 දෙනෙකු සිටිති. එක එකක් යටත් පිරිසෙයින් විධායක නිලධාරීන් දෙදෙනෙකු වත් සිටින හෝ විධායක නිලධාරීන් 9 දෙනා කණ්ඩායම් තුනකට බෙදා වෙන් කිරීමට ආයතනයට අවශ්‍යව ඇත. පිළියෙල කරගත හැකි කණ්ඩායම් ගණන සොයන්න.

b) $r \in \mathbb{Z}^+$, $U_r = \dfrac{4}{r(r+2)(r+4)}$ යැයි ගනිමු. $f(r) = \dfrac{Ar + B}{r(r+2)}$ ලෙස ගෙන,

$U_r = f(r) - f(r+2)$ වන පරිදි A හා B නියත සොසායන්න.

$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} U_r$ ශ්‍රේණිය අභිසාරි බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

තවද $\sum_{r=1}^{\infty} (U_r + \lambda U_{r+2}) = 1$ වන පරිදි λ හි අගය සොයන්න.

13) a) $A = \begin{bmatrix} a & -1 & 2 \\ 3 & a & b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & c & d \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ හා $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ යැයි ගනිමු.

මෙහි $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $AB^T = C$ නම් a, b, c හා d හි අගයන් සොයන්න.

$D + C = 4I$ යැයි ගනිමු. I යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ. D^{-1} සොයන්න.

$ED = C$ වන පරිදි E න්‍යාසය සොයන්න. $ED - DE \neq O$ බව පෙන්වන්න. O යනු ගණය 2 වන ශූන්‍ය න්‍යාසය වේ.

b) $Z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$ හා $Z_2 = 3 + 3i$ යැයි ගනිමු. Z_1 හා Z_2 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා වේ.

$r > 0$ හා $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ වන $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

$Z_1 \cdot Z_2$ හා $\frac{Z_1}{Z_2}$ යන්න සොයන්න. ඒවා $x + iy$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න.

c) $Z = \cos\theta + i\sin\theta$ නම් $\frac{1}{z} = \cos\theta - i\sin\theta$ බව පෙන්වන්න.

$Z + \frac{1}{z}$ හා $Z - \frac{1}{z}$ ලබාගෙන, ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් Z^n හා $\frac{1}{Z^n}$ ලියා දක්වන්න. එය භාවිතයෙන් $Z^n + \frac{1}{Z^n}$ හා $Z^n - \frac{1}{Z^n}$ ලබාගන්න.

$(2 - 2\sqrt{3}i)^5$ හා $(2 + 2\sqrt{3}i)^5$ සොයා එනයින් $(2 + 2\sqrt{3}i)^5 \cdot (2 - 2\sqrt{3}i)^5$ යන්න 4^{10} මගින් ලැබෙන බව පෙන්වන්න.

14) a) $x \neq 2$ සඳහා $y = \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{(x-2)^3}$ යැයි ගනිමු. y හි පළමු ව්‍යුත්පන්නය $\frac{dy}{dx} = \frac{6x(1-x)}{(x-2)^4}$ බව පෙන්වන්න. එනයින් ශ්‍රිතයේ හැරුම් ලක්ෂ්‍ය ස්පර්ශෝන්මුඛ හා අක්ෂ ඡේදන ලක්ෂ්‍ය පැහැදිලිව දක්වමින් ප්‍රස්තාරයේ දල සටහනක් අඳින්න.

ඉහත ශ්‍රිතයේ දෙවන අවකලන සංගුණකය $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6(2x^2+x-2)}{(x-2)^5}$ බව දී ඇත. අවතලතාව පරීක්ෂා කිරීම මගින් ශ්‍රිතයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යවල බණ්ඩාංක සොයන්න.

b) දිග l වන යකඩ පටියක් මුළුමනින්ම යොදා ගනිමින් ගොඩනැගිල්ලක කාමරයක් සඳහා ජනෙල් රාමුවක් සකස් කළ යුතු වේ. ජනේලයේ පහල කොටස සෘජුකෝණාස්‍රාකාර විය යුතු අතර එහි ඉහල කොටස සෘජුකෝණාස්‍රයේ පළලට සමාන පළලින් යුත් සමපාද ත්‍රිකෝණයකි. l දිග යොදා ගත යුත්තේ ජනේලයේ පරිමිතිය සඳහා පමණි. කාමරයට උපරිම ආලෝකයක් ලැබීම සඳහා ජනේලයේ මිනුම් සොයන්න.

23 AL API (PAPERS GROUP)

15) a) $x^2 + 3x + 5 = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)$ වන පරිදි A, B, C නියත සොයන්න.

එනයින් $\dfrac{x^2+3x+5}{(x-1)(x+2)}$ හි භින්න භාග ලියා දක්වා, $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2+3x+5}{(x-1)(x+2)}\,dx$ සොයන්න.

b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\displaystyle\int \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}\,dx$ සොයන්න.

c) $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)dx$ බව පෙන්වන්න.

එනයින් $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x^2 \sin x}{(2x-\pi)(1+\cos^2 x)}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$ බව පෙන්වන්න.

16) a) ABCD රොම්බසයක AB පාදයේ සහ AC විකර්ණයේ සමීකරණ පිළිවෙලින් $3x - y + 6 = 0$ හා $x - y + 8 = 0$ වේ. B ශීර්ෂයේ ඛණ්ඩාංක (3. 15) වේ. රෝම්බසයේ ඉතිරි පාද තුනේ සමීකරණ සොයන්න.

b) (1. 1) හා (-1. 0) හරහා යන වෘත්තයක් $S \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0$ වෘත්තය P හා Q යන ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකකදී ඡේදනය කරයි. $S = 0$ වෘත්තයට P හා Q ලක්ෂ්‍යයලදී ඇඳි ස්පර්ශක R හිදී හමුවේ. R ලක්ෂ්‍යය $(2a^2 - 3)x + (a^2 - 1)y - a^2 = 0$ යන සරල රේඛාව මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

17) a) i) $a \sec\theta = 1 - b\tan\theta$ සහ $a^2 sec^2\,\theta = 5 + b^2\,tan^2\,\theta$ නම්

$a^2b^2 + 4a^2 = 9b^2$ බව පෙන්වන්න.

ii) $\cos(x-y) = a\cos(x+y)$ නම් $\cot x \cot y = \frac{a+1}{a-1}$ බව පෙන්වන්න.

b) i) θ හි සියලු අගය සඳහා $P = sin^2\,\theta + cos^4\theta$ නම් $\frac{3}{4} \leq P \leq 1$ බව පෙන්වන්න.

ii) $y = \sqrt{3}\sin 2x$ දළ ප්‍රස්තාරය $[0 < -\pi]$ සීමාවේ අඳින්න.

23' AL API (PAPERS GROUP

c) සුළු කෝණී ත්‍රිකෝණයක $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ බව පෙන්වන්න. a^2, b^2, c^2 සමාන්තර ශ්‍රෙණියක වේ.

$\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ සමාන්තර ශ්‍රේණියක පිහිටන බව පෙන්වන්න.

***

B කොටස

තෝරාගත් ප්‍රශ්න 05කට පිළිතුරු සපයන්න.

11) a) $AB = l$ වන ලෙස සුමට තිරස් තලයක් මත පිහිටි A හා B අචල ලක්ෂ දෙකක පිළිවෙලින් P හා Q අංශු දෙකක් තබා ඇත. $t = 0$ කාලයේ දී P අංශුව නිශ්චලතාවයෙන් ආරම්භ කර $u(< \sqrt{2al})$ වේගයට පැමිණෙන තෙක් a නියත ත්වරණයකින් ද ඉන්පසුව u ඒකාකාර වේගයෙන් ද $\overline{AB}$ දිශාවට චලනය වේ. P අංශුව u වේගයට පැමිණෙන මොහොතේදි Q අංශුව B ලක්ෂයෙන් ආරම්භ කර u වේගයෙන් ඒකාකාර ලෙස $\overrightarrow{BA}$ දිශාවට චලනය වේ. P හා Q අංශු වල චලිතය සඳහා ප්‍රවේග - කාල වක්‍රවල දළ සටහන් එකම රූපයක අදින්න. එනයින්,

i) P අංශුව නියත ත්වරණයෙන් ගමන් කළ දුර සොයන්න.

ii) P හා Q අංශු එකිනෙක හමුවීමට ගන්නා කාලය $\left(\frac{2al+3u^2}{4ua}\right)$ බව පෙන්වන්න.

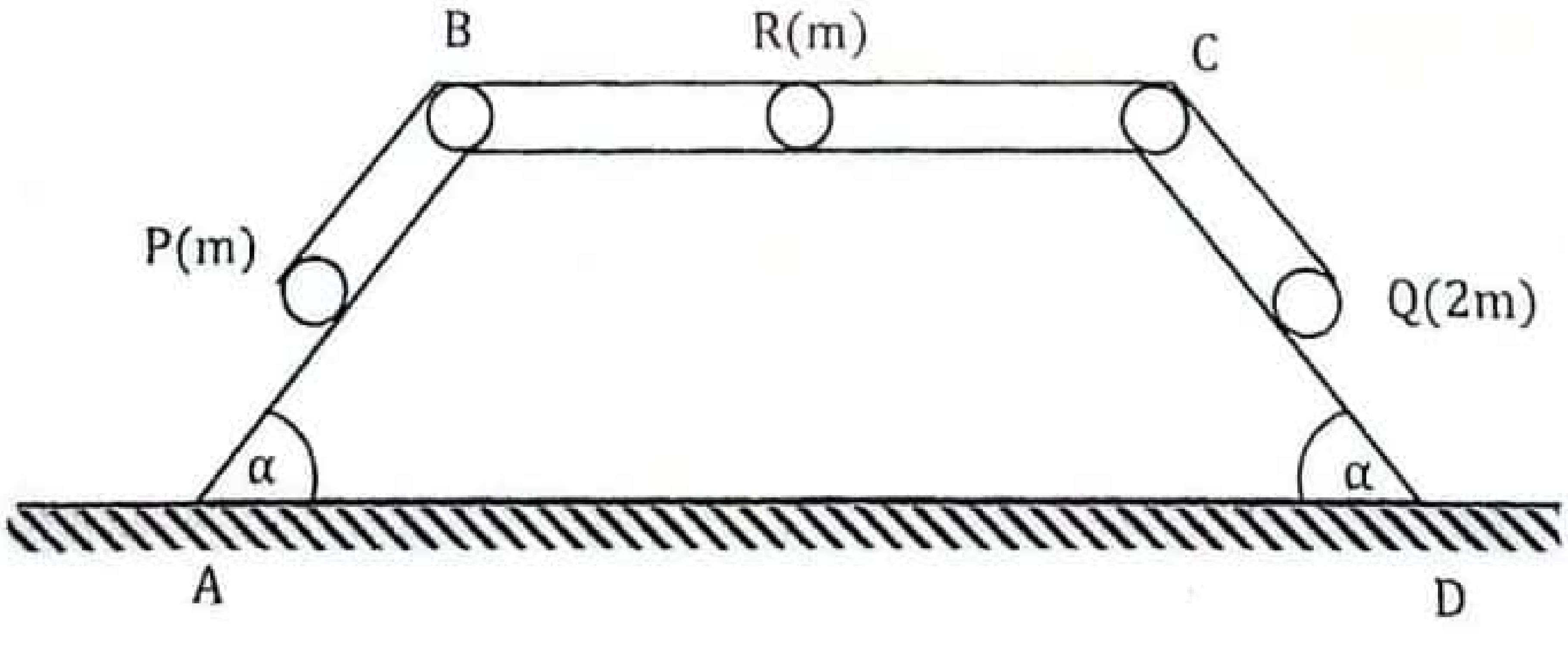
iii) P අංශුව හමුවීම සඳහා Q අංශුව ගමන් කරන ලද මුළු දුර සොයන්න.

b) දකුණු දිශාවට $u\ km\ h^{-1}$ වේගයෙන් චලනය වන A නම් නැවකට $t = 0$ කාලයේදී බෝට්ටුවක් $\sqrt{2}u\ km\ h^{-1}$ වේගයෙන් චලනය වනු දකියි. එම මොහොතේම උතුරින් බටහිරට $75°$ ක දිශාවට චලනය වන B නම් වෙනත් නැවකට, බෝට්ටුව නැගෙනහිර දිශාවට $u\ km\ h^{-1}$ වේගයෙන් චලනය වන දර්ශනය වෙයි. නැව් දෙකේ චලිතය සඳහා සාපේක්ෂ ප්‍රවේගවල ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ එකම රූපයක අදින්න. එනයින් B නැවේ වේගය සොයන්න.

තවද බෝට්ටුවේ ප්‍රවේගය $\frac{\sqrt{2}u(\sqrt{3}-1)}{2}$ බව ද පෙන්වන්න.

23' AL API (PAPERS GROUP

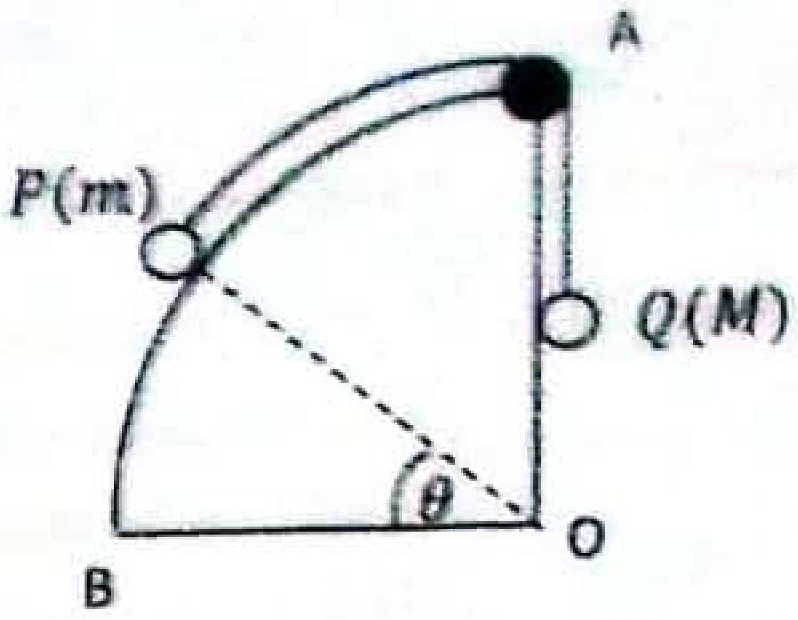
12) a) රූපයේ දැක්වෙන්නේ ස්කන්ධය M වන සුමට කුඤ්ඤයක හරස්කඩකි. AB හා CD තිරසට α කෝණයකින් ආනත වේ. B හා C හි ඇති කුඩා සුමට කප්පි මතින් යන තන්තුවක දෙකෙලවරට ස්කන්ධ පිළිවෙලින් m හා $2m$ වන P හා Q සුමට අංශු දෙකක් සම්බන්ධ කොට ඇත. ස්කන්ධය m වන තුන්වන R නම් අංශුවක් තන්තුවේ B හා C අතර කොටසේ අමුණා තිබේ. කුඤ්ඤයට සුමට තිරස් තලය මත චලනය වීමට නිදහස තිබේ.



තලයට සාපේක්ෂව කුඤ්ඤයේ ත්වරණය ද තන්තු කොටස්වල ආතතිය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියන්න.

ආරම්භයේදී P අංශුව AB මධ්‍යලක්ෂ්‍ය මත පිහිටයි නම් හා $AB = 2a$ නම් පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට නිදහස් කරන ලද විට P අංශුවට B වෙත ළගාවීමට ගතවන කාලය නිර්ණය කිරීම සඳහා සමීකරණයක් ලියන්න.

b) රූපයේ දැක්වෙන්නේ සුමට අචල ඝන වස්තුවකින් කපාගත් වෘත්ත පාදයක සිරස් හරස්කඩකි. එහි මුදුනේ A නම් සුමට කප්පියක් උඩින් වැටී ඇති ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට පිළිවෙලින් m හා $M\ (M > m)$ ස්කන්ධ සහිත P හා Q අංශු දෙකක් ඈඳා තිබෙයි. OP (OB එල්ලේ) තිරස් වන විට චලිතය ආරම්භ කරයි නම්.



$(M+m)a\dot{\theta}^2 = 2g(M\theta - m\sin\theta)$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි θ යනු t කාලයේදී OP හා OB අතර කෝණය වේ. t කාලයේදී වක්‍ර පෘෂ්ඨය මගින් P අංශුව මත ප්‍රතික්‍රියාව ද තන්තුවේ ආතතිය ද සොයන්න.

13) ලුහු ප්‍රත්‍යස්ථ තන්තුවක් මගින් ගුරුත්වය යටතේ, අචල ලක්ෂ්‍යයකින් අංශුවක් එල්ලා තිබේ. අංශුව සමතුලිතව එල්ලෙමින් පවතින විට තන්තුවේ එහි ස්වභාවික දිගේ සිට l දුරකට ඇදී පවතී. සමතුලිත පිහිටීම වටා කුඩා සිරස් දෝලනවල කාලාවර්තය $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ බව පෙන්වන්න.

දැන් සමතුලිත පිහිටීමේ සිට ඊට පහළින් $3l$ දුරකට යන තෙක් අංශුව පහළට ඇද ඉන්පසු නිශ්චලතාවේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ. අංශුව $\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{\pi - cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\sqrt{2}\right\}$ කාලයක් ඉහළ නගින බව ඔප්පු කරන්න.

23' AL API (PAPERS GROUP)

14) a) a හා b ශුන්‍ය නොවන හා සමාන්තර නොවන දෛශික යැයි ද $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ යැයි ද ගනිමු.

$\lambda\underline{a} + \mu\underline{b} = \underline{o}$ නම් $\lambda = 0, \mu = 0$ බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගනිමු. AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය D ද CD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය E ද වේ. AE (දික් කළ) හා BC රේඛා F හිදී හමුවේ. $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$ හා $\overrightarrow{AC} = \underline{b}$ යැයි ගනිමු. ත්‍රිකෝණ ආකලන නියමය භාවිතයෙන් $\overrightarrow{AE} = \frac{a+2b}{4}$ බව පෙන්වන්න.

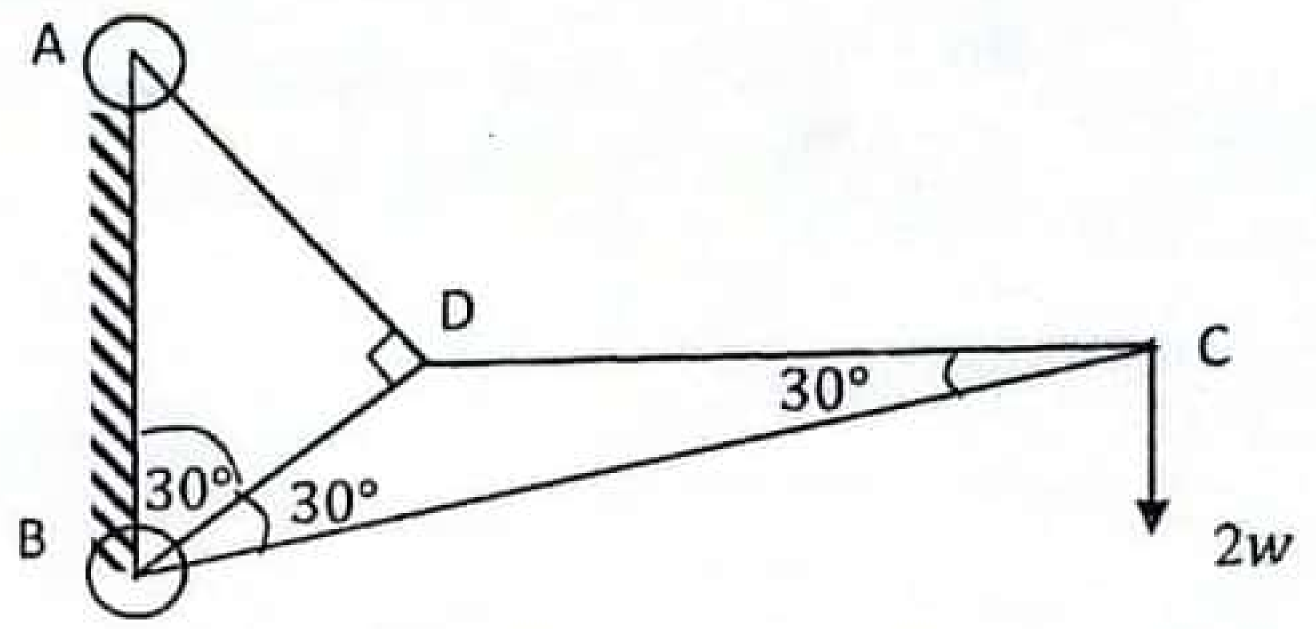
$\overrightarrow{AF} = \alpha\overrightarrow{AE}$ හා $\overrightarrow{CF} = \beta\overrightarrow{CB}$ වන්නේ ඇයිදැයි පැහැදිලි කරන්න.

මෙහි $\alpha; \beta \in \mathbb{R}$ වේ. ACF ත්‍රිකෝණය සැලකීමෙන් $(\alpha - 4\beta)\underline{a} + 2(\alpha + 2\beta - 2)\underline{b} = 0$ බව පෙන්වන්න. එනයින් α හා β හි අගයන් සොයන්න.

b) A, B, C හා D යනු පැත්තක දිග මීටර a වන සමචතුරස්‍රයක ශීර්ෂ වේ. E යනු $CD = DE$ වන ආකාරයට දික්කරන ලද CD මත පිහිටි ලක්ෂ්‍ය වේ. විශාලත්ව නිව්ටන් $p, 2p, 3p, lp, mp$ හා np වන බල පිළිවෙලින් AB, AD, CD, AC, EA හා BC පාද දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙලින් දැක්වෙන දිශා අතට ක්‍රියා කරයි. පද්ධතිය සමතුලිතතාවයේ පවතී නම් l, m හා n හි අගයන් සොයන්න. EA දිගේ ක්‍රියා කරන බලය DB දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙලින් දැක්වෙන දිශා අතට ක්‍රියාකරන එකම විශාලත්වයක් සහිත බලයක් මගින් ප්‍රතිස්ථාපනය කෙරේ. පද්ධතිය සමතුලිතතාවයේ පවත්වා ගැනීම සඳහා යෙදිය යුතු යුග්මයේ විශාලත්වය හා අත සොයන්න.

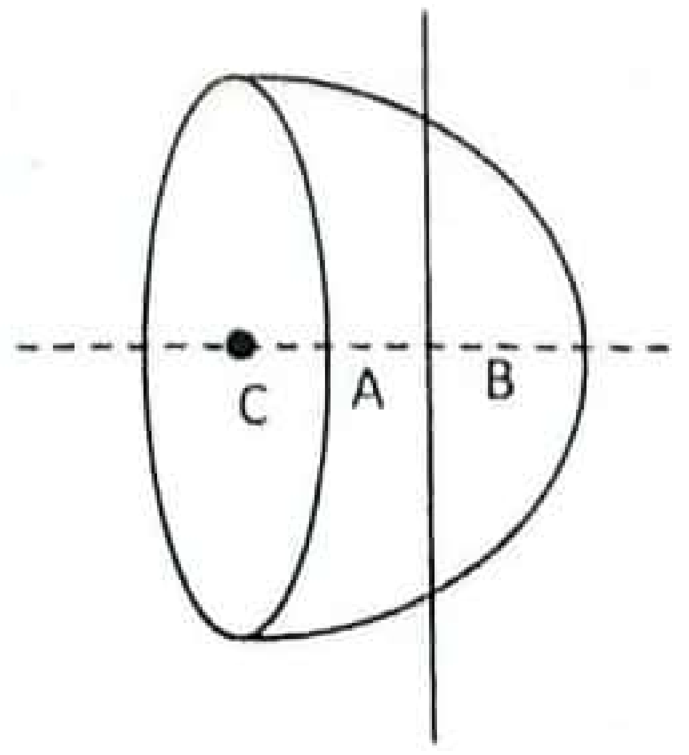
15) a) ඒකක දිගක බර w බැගින් වූ ද $AB = AD = l\sqrt{3}$ හා $BC = DC = l$ වූ ද AB, BC, CD හා DA ඒකාකාර දඬු හතරක් ABCD රාමු සැකිල්ලක් සාදන පරිදි ඒවායේ කෙළවරවල් වලින් සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. දිග $2l$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් A හා C සන්දි සම්බන්ධ කර ඇත. රාමු සැකිල්ල A සන්ධියෙන් එල්ලනු ලැබ සිරස් තලයක සමතුලිතව එල්ලෙයි. තන්තුවේ ආතතිය $\frac{wl}{4}(5 + \sqrt{3})$ බව පෙන්වන්න.

b) අචල ලෙස සන්ධි කළ AD, BD, BC හා CD දඬු වලින් සෑදි රාමු සැකිල්ල A හා B හිදී සිරස් බිත්තියකට සුමට ලෙස සවි කර තිබේ. C හිදී 2w භාරයක් දරයි. A හා B ප්‍රතික්‍රියාත්, දඬුවල ප්‍රත්‍යාබලත් සොයන්න.



16) අරය $2a$ වූ කුහර ඒකාකාර අර්ධ ගෝලයක් ආධාරකයේ C කේන්ද්‍රයේ සිට $\sqrt{3}a$ දුරකදී එහි අක්ෂයට ලම්බ තලයක් මගින් කපා කොටස් දෙකකට වෙන් කරනු ලැබේ. (රූපය බලන්න) රූපයේ A මගින් දැක්වෙන කොටසේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය C සිට $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ දුරකින් සමමිති අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

අරය a ද උස $8a$ ද වූ ඒකාකාර කුහර වෘත්ත සිලින්ඩරයක එක් කෙළවරක් වසා තිබෙන අතර අනෙක් කෙළවර A කොටසේ සම්පාත වන දාරය හා පෑස්සීමෙන් බඳුනක් සාදනු ලැබේ. මුළු භාජනයම එකම පෘෂ්ඨීක ඝනත්වයකින් යුත් ද්‍රව්‍යයකින් සාදා ඇතැයි උපකල්පනය කර බඳුනේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, සිලින්ඩරයේ සංවෘත ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{2(35+16\sqrt{3})a}{17+4\sqrt{3}}$ දුරකින් සමමිති අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.



23' AL API (PAPERS GROUP)

17) a) X නම් පෙට්ටියක රතුපාට කාඩ් 4 ක් හා නිල්පාට කාඩ් 6ක් අඩංගු වේ. Y නම් පෙට්ටියක රතුපාට කාඩ් 3 ක් හා නිල්පාට කාඩ් 2ක් අඩංගු වේ. හිස ලැබීමේ සම්භාවිතාව $\frac{2}{3}$ ක් වන නැඹුරු කාසියක් උඩ දමා හිස ලැබුනේ නම් X පෙට්ටියෙන් ද අගය ලැබුනේ නම් Y පෙට්ටියෙන් ද සසම්භාවී ප්‍රතිස්ථාපනයෙන් තොරව කාඩ්පත් දෙකක් එකකට පසු එකක් ලෙස ගනු ලැබේ. (මුලින් කාසිය උඩදමා අනතුරුව පෙට්ටියෙන් කාඩ් දෙකක් ගනු ලැබේ.) ඉවතට ගත් කාඩ්,

i) දෙකම රතු ඒවා වීමේ

ii) අඩු තරමින් එකක් වත් රතු පාට එකක් වීමේ

iii) දෙකම එකම වර්ණයේ බව දී ඇති විට, ගන්නා ලද කාඩ් දෙකම රතු පාට ඒවා වීමේ, සම්භාවිතාව සොයන්න.

b) විශ්ව විද්‍යාලයට ළමුන් ඇතුලත් කර ගැනීමේ අභියෝගයතා පරීක්ෂණයකදී ළමුන් 100 ක් ලබාගත් ලකුණු පහත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ දී ඇත.

ලකුණු	සංඛ්‍යාතය
0 – 20	15
20 – 40	20
40 – 60	40
60 – 80	15
80 – 100	10

i) මෙම ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය, සම්මත අපගමනය හා මාතය නිමානය කරන්න.

ii) අභියාචනා ඉදිරිපත් වීම මත නැවත ලකුණු පරීක්ෂා කිරීමේදී උත්තර පත්‍ර දෙකක ලකුණු පහත පරිදි වෙනස් විය යුතු බව සොයාගන්නා ලදී.

පෙර ලකුණු	නැවත සමීක්ෂණයෙන් පසු ලකුණු
50	62
70	79

මෙම නව ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍ය හා සම්මත අපගමනය සොයන්න.

23' AL API (PAPERS GROUP)